Bellavista, 18 de octubre, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL N° 127-2022-D-FCNM. - Bellavista 18 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto los Proveídos N°630-2022-D-FCNM y N°634-2022-D-FCNM, recibido en forma virtual el 07 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX", presentado por las Srtas. VILLAVICENCIO URBANO, GERALDINE MARILYN y CONTRERAS CHAPIAMA, MARÍA MARGARITA, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

CONSIDERANDO:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, **Asesores**, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante las Resoluciones Nº 090-2022-D-FCNM y Nº 091-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 respectivamente, se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX", presentado por las Srtas. VILLAVICENCIO URBANO, GERALDINE MARILYN y CONTRERAS CHAPIAMA, MARÍA MARGARITA; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. EUGENIO CABANILLAS LAPA (Presidente), Lic. ABSALÓN CASTILLO VALDIVIESO (Secretario), Dr. PEDRO CANALES GARCÍA (Vocal), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Suplente);

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 07 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado "OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX", presentado por las Srtas. VILLAVICENCIO URBANO, GERALDINE MARILYN y CONTRERAS CHAPIAMA, MARÍA MARGARITA, el cual ha sido evaluado y cumple con los requisitos para su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. APROBAR, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX**", presentado por las Srtas. VILLAVICENCIO URBANO, GERALDINE MARILYN y CONTRERAS CHAPIAMA, MARÍA MARGARITA, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

2º. AUTORIZAR, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

3º. TRANSCRIBIR, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesadas, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°634-2022-D-FCNM

Ref. : **Dictamen Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis**
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. VILLAVICENCIO URBANO, Geraldine Marilyn
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

Dictamen

Asunto: Evaluación de Proyecto de Tesis.

Lugar: Facultad de Ciencias Naturales y Matematica.

Fecha: 01 de Octubre de 2022.

Los que suscribimos: Dr. Pedro Canales García, Lic. Absalón Castillo Valdivieso, Dr. Edinson Montoro Alegre y Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, designados por Resolución Decanal No Nº 091-2022-D-FCNM del 08 de Agosto de 2022, como Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex", presentado por la Bachiller VILLAVICENCIO URBANO, GERALDINE MARILYN, para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis , cumplimos en dictaminar, después de una exhaustiva y meticulosa revisión, que: el Proyecto en mención reúne los requisitos exigidos para su aprobación, y continuación del trámite correspondiente.

Dr. Pedro Canales García

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Dr. Edinson Montoro Alegre

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

“OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX”

Autores:

María Margarita Contreras Chapiama

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

Asesor:

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Línea de investigación

Análisis Numérico y Matemática Computacional

Callao, 2022

PERÚ

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Asesor

María M. Contreras Chapiama

Bachiller

Geraldine M. Villavicencio Urbano

Bachiller

INFORMACIÓN BÁSICA

1. FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Método de optimización para operadores lineales
3. TÍTULO: Optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.
4. AUTORES: María Margarita Contreras Chapiama

   ORCID: 0000-0002-2745-3881

   Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

   ORCID: 0000-0001-9096-1494

   ASESOR: Magister Ever Franklin Cruzado Quispe

   ORCID: 0000-0001-8045-6785
5. LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
6. UNIDADES DE ANÁLISIS: Programación lineal
7. TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica
8. TEMA OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La teoría espectral fue introducida por David Hilbert en su formulación original de la teoría del espacio de Hilbert, luego se extendió a los espacios de Banach, donde se estudian los operadores compactos y muchas propiedades espectrales similares a la de matrices.

La teoría espectral proporciona una herramienta muy potente para entender los operadores lineales, esto se da descomponiendo el espacio sobre el que actúan, en subespacios invariantes sobre los cuales su acción es más simple. En el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal solo está formado por los valores propios.

El radio espectral es un concepto que se utiliza para saber si una matriz iterativa converge o no cuando se resuelve un sistema lineal mediante procesos iterativos (Jacobi, Gaduss-Seidel o SOR).

Blondel & Nesterov (2009), probaron que para familias con operadores lineales de matrices no negativas, con incertidumbre de columna independiente, el radio espectral máximo es en realidad igual al radio espectral conjunto, esta demostración permitirá resolver el problema de calcular el radio espectral conjunto y de ahí con la demostración se pretende en este trabajo estudiar el problema de optimizar el radio espectral máximo y mínimo de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita de alguna familia compacta.

Para realizar tal objetivo se propone estudiar el método espectral simplex elegido por ser eficiente en cuanto la optimización del radio espectral.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Si bien es importante el estudio del radio espectral en las distintas áreas de aplicación, como son la teoría de grafos, la teoría de ecuaciones diferenciales o en el álgebra lineal entre otros, calcularlo resulta extremadamente complejo.

En este trabajo se estudiará el método espectral simplex para optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita, teniendo en cuenta que estos operadores compartirán un mismo cono invariante, es decir que para todo cono su aplicación por el operador sigue estando en el cono (por ejemplo, una familia de matrices no negativas).

1.2. Formulación del problema

Por lo señalado anteriormente, exponemos lo siguiente.

Problema General

¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?

Problema Específico

- ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales?
- ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?

1.3. Objetivos

Objetivo General

Optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.

Objetivo Específico

- Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
- Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

1.4. Justificación

El problema de encontrar la matriz estable o inestable más cercana juega un papel importante en el análisis de ecuaciones diferenciales, dinámica lineal sistemas, electrodinámica, etc. Este problema es notoriamente difícil debido a las propiedades del radio espectral en función de matriz: no es convexa ni cóncava, puede perder la continuidad de Lipschitz en algún punto, Por eso la mayoría de los métodos para este problema sólo encuentran mínimos locales. Sin embargo, para algunas clases de matrices y normas matriciales, este problema se puede resolver eficazmente incluso para mínimos absolutos. Nosotros analizaremos el caso de matrices no negativas. Corresponden a sistemas lineales positivos que surgen naturalmente en problemas de combinatoria, economía matemática, población dinámica, etc.

Para algunos conjuntos de matrices, el problema de optimizar el radio espectral puede resolverse de manera eficiente. En este trabajo se considerarán los conjuntos de matrices no negativas con la estructura del producto, en resumen, familias de productos. Una familia A de matrices d×d se llama familia de productos si hay conjuntos compactos $\mathcal{F}_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d,$ tal que A consta de todas las matrices posibles con i-ésima fila de $\mathcal{F}_i$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Los conjuntos $\mathcal{F}_i$, se denominan conjuntos de incertidumbre. Por tanto, las familias de productos son conjuntos de matrices con incertidumbres de fila independientes: sus filas se eligen independientemente de los conjuntos $\mathcal{F}_i$. Topológicamente, son de hecho productos de los conjuntos de incertidumbre: $\mathrm{A} = \mathcal{F}_i, \times \dots \times \mathcal{F}_i$. Estas familias han sido estudiadas en la literatura debido a aplicaciones en la teoría de grafos espectrales, sistemas asincrónicos, economía matemática, dinámica de poblaciones, etc. El método espectral simplex se aplica cuando todos los conjuntos de incertidumbre $\mathcal{F}_i$ son finitos. Consiste en un aumento consecutivo del radio espectral mediante correcciones de una fila de una matriz. La idea principal es la siguiente. Tomamos una matriz A de una familia de productos A y calculamos su vector propio v de Perron-Frobenius. Luego, para cada $i = 1, \dots d,$ tratamos de maximizar el producto escalar de v con filas del conjunto de incertidumbre $\mathcal{F}_i$. Si para todo i, los máximos se alcanzan en las filas de A, entonces A es la matriz con el radio espectral máximo en la familia A. De lo contrario, reemplazamos una fila de A, digamos, la i-ésima, con la fila de $\mathcal{F}_i$ maximizando el producto escalar. Obtenemos una nueva matriz, repetimos el mismo procedimiento, etc.

La ventaja de este método es que es aplicable tanto para maximizar como para minimizar el radio espectral. Sin embargo, una deficiencia importante es que solo funciona para matrices estrictamente positivas. Si alguna fila de $\mathcal{F}_i$ tiene una entrada cero, entonces el algoritmo puede ciclar.

Incluso si no realiza un ciclo, es posible que la matriz de terminales no proporcione una solución. Una idea natural es hacer que todas las matrices sean positivas mediante ligeras perturbaciones de los coeficientes y luego aplicar el algoritmo a las matrices perturbadas. Sin embargo, en la práctica, esto conduce a errores numéricos en el cálculo del radio espectral óptimo que son difíciles de controlar. La razón es que, en dimensiones altas incluso una pequeña perturbación de coeficientes puede cambiar significativamente el radio espectral.

Es así que en este trabajo se espera optimizar el radio espectral para una clase de familias formada por operadores lineales sobre espacio de dimensión finita vía el método espectral simplex.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2. Temporal

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones temporales

1.5.3. Espacial

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones espaciales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: internacionales y nacionales

Internacional

Chubay (2017) en su tesis “Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio” demuestra que los operadores posición y momentum son adjuntos y densamente definidos en el espacio de Hilbert separable L^2 (R). Resalta la teoría de operadores desarrollada por Von Neuman, el cual se basa en el estudio de operadores en mecánica cuántica, de esta manera desarrolla la caracterización de un espacio de Hilbert separable, así el espectro de los operadores da guía para la formulación de las propiedades de operadores en espacios abstracto con producto interno.

Palacios (2018) en su tesis “Una introducción a la teoría espectral de gráficas” tuvo como objetivo primordial, contribuir a tener presente que la matemáticas se tejen como una robusta red, cuyos puntos más fuerte son los nudos, amarres entre diferentes ramas de la teoría, aquellas encrucijadas a las cuales es posible llegar partiendo de diferentes caminos iniciales, que son muy importantes en la teoría espectral de gráficas que son puente de conexión entre el álgebra, el análisis funcional y la teoría de gráficas entre otras.

Ganesh (2018) en su tesis “Teoría espectral para obtener operadores positivos absolutamente mínimos” probó que la propiedad mínima de logro de un operador lineal acotado en un espacio H de Hilbert cuyo módulo mínimo se encuentra en el espectro discreto, es estable bajo pequeñas perturbaciones compactas. También observó que, dado un operador acotado con un módulo mínimo esencial estrictamente positivo, el conjunto de perturbaciones compactas que no producen un operador que alcanza el mínimo es más pequeño que un conjunto denso. Además, intentó extender estos resultados de estabilidad a las perturbaciones de todos los operadores lineales acotados con normas pequeñas y obtener resultados posteriores.

Mejstrik (2019) en su tesis “Radio espectral articular y esquemas de subdivisión” amplía el enfoque basado en matrices para la configuración de esquemas de subdivisión múltiple, realiza una modificación al algoritmo de politopo invariante realizado por Guglielmi y Protasov en los años 2013 para poder encontrar el valor exacto del radio espectral de una gran clase de matrices, cuando la articulación es de menos de 5 segundos. Este nuevo algoritmo permite calcular límites inferiores para el radio espectral conjunto.

Es así que al contrastar los resultados expuestos sobre la literatura del tema se observa la necesidad de optimizar el radio espectral. El presente trabajo se enfoca en encontrar el radio espectral máximo y mínimo.

Nacional

Gee y Limo (2016) en su investigación “Determinantes de la inflación peruana: un enfoque de econometría espectral” utiliza el análisis espectral para contrastar las principales teorías económicas sobre la inflación, describiendo una serie de tiempos de manera muy útil, ya que, permite comprender cuán relevantes son los ciclos en diferentes frecuencias en la evolución de la variable. Una gran ventaja en el uso de la econometría espectral en este documento es la posibilidad de estudiar los determinantes de la inflación y reconocer su influencia en un plazo específico.

Sáenz (2016) en su tesis “Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas” contribuye en sentar los fundamentos sobre métodos espectrales, para que sean aplicados en futuras investigaciones más elaboradas, así como brindar los códigos de implementación (en Matlab), los cuales raramente se encuentran en forma explícita en la literatura. presentando en forma detallada los métodos espectrales polinomiales, útiles para problemas con condiciones de frontera no periódicas. Presentamos los métodos de Galerkin, Tau y de Colocación y brinda ejemplos de la implementación numérica de la ecuación del calor usando los métodos de diferencias finitas y los métodos espectrales. Además, se brindan los detalles necesarios para implementar la ecuación de Burger usando los métodos espectrales.

Fernández (2017) en su tesis “Propuesta didáctica y conocimientos de un método espectral (Método de Chebyshev), en la especialidad de matemática” estudia los métodos espectrales y construye con un sistema didáctico, asequible a todos los estudiantes que no tiene ese conocimiento, se da a conocer las mejores presentaciones y armado de los polinomios como los polinomios de Newton, y los polinomios de mínimo cuadrados terminando con los polinomios ortogonales como el de Chebyshev, mostramos su aplicación a la economización de series en alta precisión. Después explica como aplicar la teoría espectral en forma didáctica a la solución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

2.2. Bases teóricas

La presente está dedicada a exponer el marco teórico necesario para la concretización de los objetivos referentes al trabajo. Para esto seguiremos los resultados mostrados en (Kreyszig, 1989), (De la Fuente, 2017), (Krein & Rutman, 1950), (Blondel & Nesterov, 2008) (Protasov V. , 1996).

2.2.1. Espacios vectoriales

La noción de espacio vectorial requiere de dos conjuntos: un conjunto $\mathbb{K}$ (los escalares) y otro conjunto E (los vectores). Estos dos conjuntos deben satisfacer ciertas propiedades, que esencialmente se refieren a que los elementos de E se puedan sumar entre sí y multiplicar por elementos de $\mathbb{K}$.

Definición. Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura algebraica que consiste de un conjunto no vacío E, a cuyos elementos se les llama vectores, junto con dos operaciones,

$$\begin{array}{ll} E \times E \to E, & \mathbb{K} \times E \to E, \\ (u,v) \mapsto u+v, & (t,v) \mapsto tv, \end{array}$$

llamadas *suma de vectores* y *multiplicación de un escalar por un vector*, respectivamente que satisfacen las siguientes propiedades:

- $u+(v+w)=(u+v)+w, \forall u,v,w \in E$ (asociativa).
- $u+v=v+u, \forall u,v \in E$ (conmutativa).
- Existe $e \in E$ tal que $e+v=v+e=v$, $\forall v \in E$ (elemento neutro).
- Para cada $v \in E$ existe $w \in E$ tal que $v+w=w+v=e$ (elemento opuesto).
- Para $1 \in \mathbb{K}$ se tienes que $1v=v, \forall v \in E$ (unimodular)
- $t(u+v)=tu+tv$ y $(\lambda+t)v=\lambda v+tv$, $u,v \in E$ y $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (distributiva).
- $\lambda(tv)=(\lambda t)v$, $\forall v \in E$, $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (seudo-asociativa).

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ es sistema generador de E si y solo si:

$$\langle\{v_1, v_2, \dots, v_n\}\rangle = E$$

O de manera equivalente:

$$\forall v \in E, \exists\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = \bar{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Diremos que son linealmente dependiente cuando no son independientes.

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$ es una base de E cuando B es un sistema generador y linealmente.

Definición. Un espacio vectorial E , es de dimensión finita si admite una base finita $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de n vectores. Diremos que la dimensión de E es n, $dim(E) = n$.

Espacios con Producto Interno

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un producto interno en E es una función $E \times E$ en $\mathbb{K}$ que asigna a cada pareja $x, y \in E$ un escalar $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$, llamado producto interno de x y y, que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Conmutativa
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ Distributiva
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle y, x \rangle$ Homogeneidad
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq \vec{0}$ Positividad

2.2.2. Transformaciones Lineales

Definición. Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. La función $A: E_1 \longrightarrow E_2$ es la regla de correspondencia que asigna a cada $x \in E_1$ un único $y \in E_2$, que es llamado imagen de x y es representado por $A(x)$. A este tipo de funciones se les conoce como transformaciones.

Además, para que una transformación sea lineal (operador lineal) debe cumplir las siguientes condiciones:

i. $A(x+y) = A(x) + A(y), x, y \in E_1$.
ii. $A(\lambda x) = \lambda A(x),\ x \in E_1, \lambda \in \mathbb{K}$.

Se dice que A es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|\ \forall x \in dom(A)$

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se llama espacio dual de E, a E^* donde

$$E^* = \{A: E \to \mathbb{K}/A \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Operadores lineales en espacios de producto interno

Definición. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal, se dice que $A^*: E \longrightarrow E$ es el operador adjunto de A, si se cumple que:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

para todo $x, y \in E$

Propiedades del operador adjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con producto interno. Si A y B son operadores lineales en E y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

1. $(A^*)^* = A$
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ donde $\bar{\alpha}$ es el conjugado de α

3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
5. $(A \circ B)^* = A^* \circ B^*$

Operador normal

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es normal si cumple:

$$A \circ A^* = A^* \circ A$$

$$M_B^B(A)M_B^B(A^*) = M_B^B(A^*)M_B^B(A)$$

donde B es una base ortonormal.

Operador autoadjunto

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es normal si $A^* = A$

2.2.3. Teoría espectral de operadores lineales

E es el elemento buscado y $\lambda \in \mathbb{K}$ (real o complejo) es un parámetro.

Definición. (Valores propios, vectores propios, espacios propios, espectro, conjunto resolvente de una matriz).

Un *autovalor* de una matriz $A = \left(a_{jk}\right)$ es un λ tal que la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene como solución $x \neq 0$. Este x se llama un *autovector* de A correspondiente al valor propio que λ.

El *espacio propio* de A es un subespacio vectorial de E formados por los vectores propios que correspondiente al valor propio λ y el vector cero.

El *espectro* de A, $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los valores propios de A.

El conjunto *resolvente* de A en el plano complejo se define como $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$.

2.2.4. Optimización y programación lineal

Veamos la representación de un problema de programación lineal:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (función\ objetivo)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,3 \ldots p-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = p \ldots q-1 \qquad (Restricciones)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = q \ldots m$$

donde p, q y m son enteros positivos tales que

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

Definición (Solución factible). Un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface todas las restricciones, se le denomina solución factible. El conjunto de todas esas soluciones se llama $región\ factible$.

Definición (Solución óptima). Es un punto factible $\bar{x}$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cualquier otro valor factible x se denomina solución óptima del problema

Problema de programación lineal en su forma estandar

Un problema lineal se dice que es de forma estándar si es de minimización y se puede representar de la siguiente manera:

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Donde $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ (b no negativo) y $A \in M^{m\times n}$

Definición (problema dual). Dado el problema inicial (primal), minimizar

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

su problema dual es maximizar

$$Z = b^T y$$

$$s.a. \quad A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

Conjunto de soluciones factibles

Para conocer las soluciones factibles en los problemas de programación matemática es necesario precisar las estructuras de las regiones de factibilidad, las cuales podrían ser:

Tabla: Estructuras que surgen en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones y desigualdades, y su representación

Estructura algebraica	Definición en función de las restricciones	Representación interna
Espacio vectorial	$Hx = 0$	$x = \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Espacio afín	$Hx = a$	$x = q + \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Cono	$Hx \leq 0$	$x = \sum_i \pi_j w_j \,;\; \pi_j \geq 0$
Politopo	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \lambda_k q_k \,; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$
Poliedro	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \rho_i v_i + \sum_i \pi_j w_j + \sum_i \lambda_k q_k \,;$ $\rho_i \in \mathbb{R}, \pi_j \geq 0,\; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$

Fuente: Formulación y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingeniería y Ciencias pág. 100

Conjuntos Convexos

Definición. Un conjunto K es convexo si y solo si

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

Para todo par de puntos $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$.

Definición (cono). Un conjunto K se dice cono si para todo $x \in K$ y todo escalar $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda x \in K$. Si K es convexo se denomina **cono convexo**, en ese caso cualquier x, y en K cuando $\alpha x + \beta y$ pertenece a K , para cualquier escalar positivo α, β.

Definición (Envoltura convexa). Dado un conjunto arbitrario M se define la envoltura convexa de M y se representa por conv (M), como la intersección de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a M.

Definición (cono dual). Si K es un cono, se define el cono dual de K como el conjunto

$$K^* = \{y | x^T y \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}$$

El cono dual siempre es convexo, aunque el original K no lo sea.

Definición. Un subconjunto K de un espacio vectorial E de denomina cono verdadero, si es convexo, cerrado, solido, en el sentido de que es su interior no es vacío $(K + (-K) = E)$, y puntiagudo lo que significa que no tiene una línea o que $x \in K, -x \in K \Longrightarrow x = 0$, o $K \cap -K = \{0\}$.

Definición (cono invariante). Se dice que un cono $K \subseteq R^n$ es invariante bajo $A \in R^{n\times n}$ si $Ax \in K$ para todo $x \in K$.

2.2.5. Matrices no Negativas

El conjunto de matrices cuadradas se denota por M_n, y el conjunto de matrices cuadradas con entradas no negativas se denomina M_n^+ . Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $D(x) \in M_n$ la matriz diagonal con el vector x como su diagonal, y por $e^x \in \mathbb{R}^n$ denotamos el vector con coordenadas $e^{x^{(i)}}$. Además, 1 denota el vector de todos los unos, 0 denota el vector de todos los ceros, y e_i denota el i-ésimo vector de coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Finalmente, Δ_n denota el simplex estándar en $\mathbb{R}^n$, y $|\mathrm{M}|$ la cardinalidad del conjunto M .

Radio conjunto de columnas (filas)

Sea $\rho(A)$ el radio espectral de la matriz A, es decir, la mayor magnitud de sus valores propios. Según el teorema de Perron-Frobenius una matriz irreducible no negativa $A \in M_n^+$ tiene un único vector propio u (hasta hasta la multiplicación escalar) tal que

$$Au = \rho(A)u,$$

y todas las componentes del vector u son entonces positivas. Sea la descomposición en columnas de A viene dada por $A = (a_1, \dots, a_n)$. Es bien sabido que el radio espectral de una matriz no negativa admite la siguiente representación:

$$\rho(A) = \inf_{u>0} \max_{1\leq i\leq n} \frac{\langle a_i, u\rangle}{u^{(i)}}$$

Cambiando las variables $u = e^x$, obtenemos

$$\rho(A) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\phi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\leq i\leq n} \langle a_i, e^x\rangle \cdot e^{-x^{(i)}}\right]$$

Denotamos por $x(A)$ el punto del rayo óptimo que satisface la ecuación

$$\langle 1, x(A)\rangle = 0,$$

y $u(A) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x(A)} > 0$. Nótese que $A^T u(A) = \rho(A) \cdot u(A)$.

Para un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ definimos la secuencia

$$x_k = A^k x_0, \quad k \geq 1.$$

Entonces

$$\langle u(A), x_{k+1}\rangle = \langle u(A), Ax_k\rangle = \langle A^T u(A), x_k\rangle$$

$$= \langle D^{-1}\big(u(A)\big)A^T u(A), D(u(A))x_k\rangle$$

$$\leq \rho(A) - 1, D(u(A))xk = \rho(A) - u(A), xk.$$

Consideremos un conjunto compacto M de matrices no negativas.

Definición (Radio de columna conjunto). Sea de M un conjunto compacto de matrices no negativas:

$$\sigma(\mathrm{M}) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in\mathrm{M}} \phi_A(x)$$

En esta expresión, las funciones $\phi_A(x)$ son convexas en x y, por tanto, la función $\max_{A\in\mathrm{M}} \phi_A(x)$ también es convexa. Como el radio de columna conjunto es una solución del problema de minimización convexa de $\sigma(\mathrm{M})$, puede calcularse en tiempo polinómico mediante algoritmos estándar de optimización convexa.

Podemos ofrecer otra interpretación interesante del radio de columna conjunto. Denotemos $\widehat{\mathrm{M}} = Conv(\mathrm{M})$ y consideremos el siguiente problema de optimización

$$\max_{A\in\widehat{\mathrm{M}}} \rho(A)$$

La desigualdad

$$\max_{A\in\widehat{\mathrm{M}}} \rho(A) \leq \rho\big(\mathrm{M}\big)$$

se demostró como Proposición 15 en Blondel, Nesterov, & Theys (2005), para una colección finita M. Por el teorema de Carathéodory esta desigualdad puede extenderse fácilmente a conjuntos de incertidumbre convexos arbitrarios.

Nótese que

$$\widehat{\max_{A\in \mathrm{M}}}\ \rho(A) = \widehat{\max_{A\in \mathrm{M}}}\ \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \phi_A(x) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in \mathrm{M}} \phi_A(x)$$

$$= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in \mathrm{M}} \phi_A(x) = \sigma\left(\mathrm{M}\right).$$

Así, podemos tratar $\sigma(\mathrm{M})$ como un valor de la *relajación lagrangiana* habitual del problema de optimización no convexo problema

$$\widehat{\max_{A\in \mathrm{M}}}\ \rho(A)$$

Nótese que

$$\max_{A\in \mathrm{M}} \rho(A) \leq \widehat{\max_{A\in \mathrm{M}}}\ \rho(A) \leq \sigma\left(\mathrm{M}\right)$$

Se puede introducir una cantidad similar al radio de columna conjunto para matrices transpuestas,

$$\mathrm{M}^T = \left\{A^T : A \in \mathrm{M}\right\}.$$

A saber, podemos definir el radio de fila conjunto del conjunto M como sigue

$$\sigma_T(\mathrm{M}) = \sigma\left(\mathrm{M}^T\right)$$

Dado que $\rho\left(\mathrm{M}\right) = \rho\left(\mathrm{M}^T\right)$, la discusión anterior también se aplica al radio fila conjunto. Sin embargo, en general tenemos que $\sigma_T\left(\mathrm{M}\right) \neq \sigma\left(\mathrm{M}^T\right)$. En las partes restantes del documento trabajaremos principalmente con el radio columna conjunto, sin mencionar que todos nuestros resultados pueden aplicarse también al radio fila conjunto.

Lema 1*. Consideremos la siguiente perturbación del conjunto de incertidumbre* M *:*

$$\mathrm{M}_{\epsilon} = \left\{A + \epsilon 1 1^T : A \in \mathrm{M}\right\}, \;\; \epsilon \geq 0.$$

Entonces $lim_{\epsilon \downarrow 0}\, \sigma\left(\mathrm{M}_{\epsilon}\right) = \sigma\left(\mathrm{M}\right)$.

Lema 2. *Sean positivos los elementos de todas las matrices de* M *. Entonces existe una matriz* $A_* = (A_1 e_1, \dots, A_n e_n)$ *formada por algunas matrices* $A_i \in \widehat{\mathrm{M}}$ *,* $i = 1, \dots, n$*, tal que*

$$\rho(A*) = \sigma(M).$$

Teorema 1. *Sea* M *un conjunto compacto de matrices no negativas. Entonces*

$$\frac{1}{p} \cdot \sigma\left(\mathrm{M}\right) \leq \rho\left(\mathrm{M}\right) \leq \sigma\left(\mathrm{M}\right),$$

donde $p = min\{n, |\mathrm{M}|\}$.

Conjuntos con incertidumbre de columna independiente

La forma más sencilla de garantizar esta inclusión es suponer que el conjunto M tiene incertidumbres de columna independientes:

$$\mathrm{M}\ \square = (a_1, \dots, a_n) :\ a_i \in Q_i, i = 1, \dots, n\}$$

donde todos los conjuntos $Q_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$, son cerrados y acotados.

T*eorema 2.* *Para un conjunto* M *que satisface la condición anterior, tenemos*

$$\max_{A \in \widehat{\mathrm{M}}} \rho(A) = \rho\left(\mathrm{M}\right) \leq \sigma\left(\mathrm{M}\right)$$

Si la solución del problema

$$\sigma(\mathrm{M}) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in \mathrm{M}} \phi_A(x)$$

existe, entonces $\sigma(\mathrm{M}) = \rho(A_*)$ *para algún punto extremo* A_* *del conjunto* M*. Por tanto*

$$\max_{A\in \mathrm{M}} \rho(A) = \rho\big(\mathrm{M}\big) \leq \sigma\big(\mathrm{M}\big) = \rho(A_*)$$

Corolario 1. *Consideremos la función* $\rho(a_1,\ldots,a_n)$ *con* $a_i \in \mathbb{R}^n_+$ *,* $i = 1,\ldots,n$*. Entonces esta función es cuasi-convexa en cada ai cuando todas las demás columnas son fijas.*

Observemos que los conjuntos inciertos de filas (o columnas) independientes surgen de forma muy natural. Una de estas situaciones se da en el contexto de los sistemas lineales asíncronos.

2.2.6. Operadores lineales que comparten un cono en común

Teorema 3. *Una familia irreducible* A *tiene un cono invariante común si* $\rho(\mathrm{A}) = \lambda_{max}(\bar{A})$*.*

Condiciones para la existencia de un cono invariante común

Para un k dado $\in \mathbb{N}$ escribimos A^k para la familia de todos los productos m^k de longitud k de las matrices de A: $\big\{A_{d_1},\ldots,A_{d_k} | d_1,\ldots,d_k \in \{1,\ldots,m\}\big\}$.

Corolario 2. *Supongamos que* A *es una familia irreducible, y que su operador promedio* $\bar{A}$ *tiene un valor propio igual a su radio espectral;*

entonces $\mathcal{A}$ posee un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{A}^k$ lo tiene.

Corolario 3. *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia irreducible, y que su operador medio A tiene un valor propio igual a su radio espectral entonces $\bar{A}$ tiene un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ todas las matrices de la familia A^k tienen entradas no negativas.*

Pasemos ahora a las condiciones necesarias. En la continuación de esta sección será más conveniente utilizar la notación ρ_1 para el radio 1 ρ. En vista del Teorema 3 cualquier límite inferior para $\rho_1(\mathrm{A})$ da una condición necesaria para la existencia de conos invariantes. Dicha cota puede obtenerse utilizando el radio 2 ρ_2 definido como

$$\rho_1(\mathrm{A}) \lim_{k\to\infty} \left(m^{-k} \sum_{d_1,\dots,d_k} \left\|A_{d_1} \dots, A_{d_k}\right\|^2\right)^{1/2k}.$$

Este valor, en contraste con ρ_1, puede encontrarse fácilmente para una familia arbitraria de operadores. Comparando las definiciones de ρ_1 y ρ_2, y utilizando las desigualdades entre las medias aritméticas y cuadráticas, obtenemos $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \sqrt{m}\rho_1$. Esto produce, en particular, que $\rho_2(\mathrm{A}) \geq \lambda_{max}(\overline{A})$. Ahora el Teorema 1, junto con la Observación 1, implica

Proposición 1. *Si $\rho_2(\mathcal{A}) > \sqrt{m}\lambda_{max}(\overline{A})$. Entonces la familia $\mathcal{A}$ no tiene cono invariante.*

Recordemos que si $\lambda_{max}(\bar{A})$ no está bien definida, es decir, $\bar{A}$ no satisface (*), entonces A obviamente no tiene un cono invariante. En particular, si uno puede encontrar $A_i, A_j \in \mathrm{A}$, para los cuales $\rho_2(A_i, A_j) > \sqrt{2}\lambda_{max}\left(\frac{1}{2}(A_i + A_j)\right)$, entonces A no tiene un cono invariante. El valor ρ_2 se calcula mediante el operador $\tilde{A}$ actuando en el espacio $\frac{d(d+1)}{2}$ dimensional $\mathrm{M_d}$ de matrices simétricas $d \times d$:

$$\tilde{A}X = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^T X A_i\right), \quad X \in \mathrm{M}_{\ d}.$$

Este operador deja invariante el cono de matrices semidefinidas positivas, por lo que el valor $\lambda_{max}(\tilde{A})$ está bien definido. Resulta que $\left[\lambda_{max}(\tilde{A})\right]^{1/2} = \rho_2(\mathrm{A})$ (Protasov V. , 1997)]. Así, ρ_2 es el valor propio de Perron-Frobenius de un operador en la dimensión $\frac{d(d+1)}{2}$. En la práctica, en lugar del operador $\tilde{A}$ se puede utilizar la matriz $d^2 \times d^2$- matriz $\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^{\otimes 2}\right)$, que tiene el mismo valor propio de Perron-Frobenius que $\tilde{A}$, donde $A_i^{\otimes 2}$ denota el cuadrado de Kronecker de la matriz A_i (Blondel & Nesterov, 2005). La dimensión de este operador es mayor, pero su matriz está fácilmente disponible.

2.2.6. Familias de producto

Considere ahora algunas familias de operadores con estructura especial. Permítanos introducir un espacio intermedio E_1 con ordenamiento parcial definido por un cono convexo puntiagudo K_1. Arreglamos un operador básico $B: E_1 \to E$, tal que $BK_1 \subseteq K$. Considere ahora una familia $\mathcal{F}$ compuesta por operadores $F: E \to E_1$. Entonces podemos definir nuestra familia principal de operadores como

$$\mathrm{M} = \{A = BF, F \in \mathcal{F}\}$$

Asumiendo $FK \subseteq K_1$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$, garantizamos que todos los operadores de la familia M compartan el mismo cono invariante K

Lema 2. *Supongamos que para* $\bar{A} = B\bar{F}$ *con* $x(\overline{A}) \in intK$ *tenemos*

$$(\bar{F} - F)x(\bar{A}) \in K_1, \ \ \forall F \in \mathcal{F}$$

Entonces $\rho(\bar{A}) = \rho^*(\mathrm{M}) = \sigma^*(\mathrm{M}) \leq \lambda^*(\mathrm{M})$.

Si $x(\bar{A}) \in K$, *y* $(\bar{F} - F)\bar{x} \in K_1$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $\rho(\bar{A}) = \rho_*(\mathrm{M}) = \sigma_*(\mathrm{M}) = \lambda_*(\mathrm{M})$.

Recuerde que el operador A se llama positivo en K si $Ax \in intK$ para todo $x \in K\backslash\{0\}$.

Lema 5. *Para la matriz* $A = BF$, *suponga que existe* $\tilde{F}$ *tal que*

$$d = \left(\tilde{F} - F\right)x(A) \in K_1, \ \ d \neq 0$$

Si $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) > \rho(A)$. *Si* $\left(F - \tilde{F}\right)x(A) \in K_1\backslash\{0\}$, *y* $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) < \rho(A)$.

2.2.7. Método espectral simplex

Condiciones teóricas del método espectral simplex

La siguiente afirmación simple se puede encontrar, en (Berman & Plemmons, 1979). Establece límites inferior y superior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo.

Lema 6. *Sean una matriz* A *y un vector* x *distinto de cero no negativos,* $\mu \geq 0$ *sea un número. Si* $Ax \geq \mu x$, *entonces* $\rho(A) \geq \mu$. *Si* $x > 0$ *y* $Ax \leq \mu x$, *entonces* $\rho(A) \leq \mu$.

Proposición 2. *Sea* A *una familia de productos no negativa. Si una matriz* $\bar{A} \in \mathrm{A}$ *es máxima (mínima) en cada fila, entonces tiene el radio espectral máximo (respectivamente, mínimo) entre todas las matrices de* A*.*

Lema 7. *Sea* $A \geq 0$ *una matriz y* v *su vector propio principal. Sea una matriz* $B \geq 0$ *obtenida de* A *reemplazando la* j*-ésima fila aj por una fila* b_j*. Entonces tenemos*

a) si $\langle b_j, v\rangle > \langle a_j, v\rangle$*, entonces* $\rho(B) \geq \rho(A)$*. Si, además,* $B > 0$*, entonces* $\rho(B) > \rho(A)$*.*
b) si $\langle b_j, v\rangle < \langle a_j, v\rangle$*, entonces* $\rho(B) \leq \rho(A)$*. Si, además,* $B > 0$*, entonces* $\rho(B) < \rho(A)$*.*

La idea del método espectral simplex

Comenzando con alguna matriz $A_1 \in \mathrm{A}$ construimos una secuencia de matrices $A_1, A_2, \ldots$ por la siguiente regla: A_{k+1} se obtiene de A_k cambiando una de sus líneas $a_i^{(k)}$ de modo que $\langle a_i^{(k+1)}, v_k\rangle > \langle a_i^{(k)}, v_k\rangle$, donde v_k es un vector propio principal de A_k. Según el Lema 2, el radio espectral no disminuye en esta secuencia. El proceso termina cuando ninguna de las filas puede ser reemplazada, es decir, cuando la matriz final A_N es máxima en cada fila. Según la Proposición 1, la matriz A_N tiene el radio espectral máximo en la familia A, siempre que $v_N > 0$.

En cada paso, la nueva fila a $a_i^{(k+1)}$ se elige de $\mathcal{F}_i$ para maximizar el producto escalar $\langle a_i^{(k+1)}, v_k\rangle$. Si $\mathcal{F}_i$ es nito, entonces el punto de máximo a $a_i^{(k+1)} \in \mathcal{F}_i$ se puede encontrar por agotamiento.

Si $\mathcal{F}_i$ es un poliedro, entonces encontramos a $a_i^{(k+1)}$ entre sus vértices que resuelven un problema de LP mediante el método simplex (habitual). Por lo tanto, el método espectral simplex actúa como un algoritmo codicioso en cada iteración. Ahora describimos el procedimiento formal del algoritmo.

2.3. Conceptual

Matrices positivas. Se define así a la matriz que tiene todos sus elementos positivos.

Vector propio. Son vectores que no cambian de dirección bajo una determinada transformación lineal.

Ortante. Es la generalización n-dimencional de un cuadrante.

Matriz reducible. Se A una matriz no negativa, se dice que es reducible si tiene un subespacio de coordenadas invariante no trivial, es decir, un espacio generado por algunos vectores e_i de la base canónica. De lo contario se llama irreducible.

2.4 Definición de términos básicos

A continuación, presentamos una definición de términos básicos. Más aún la referencia bibliográfica de donde ha sido obtenida.

Definición (Radio espectral). El radio espectral de una matriz A es el módulo de sus valores propios, representado por $\rho(A)$.

$$\rho(A) = max\{|\lambda_i(A)|, i = 1, \dots, n\}$$

(De la Fuente, 2017, pág. 240)

Definición (compacidad). Se dice que un espacio métrico E es compacto si toda secuencia en E tiene una subsecuencia convergente. Se dice que un subconjunto A de E es compacto si A es compacto considerado como un subespacio de E, es decir, si toda sucesión en A tiene una subsecuencia convergente cuyo límite es un elemento de A. (Kreyszig, 1989, pág. 77)

Definición (Operador lineal). Un operador lineal A es un operador tal que

i. el dominio $D(A)$ de A es un espacio vectorial y el rango $R(A)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo,
ii. para todo $x, y \in D(A)$ y escalares α,

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(ax) = aAx$$

(Kreyszig, 1989, pág. 82)

Definición (Problema de optimización). Consiste en la búsqueda de valores para unas determinadas variables (variables de decisión) de forma que, cumpliendo un conjunto de requisitos representados mediante ecuaciones y/o inecuaciones algebraicas (restricciones) que limitarán la elección de los valores de las variables de decisión, proporcionan el mayor o el menor valor posible para una función (función objetivo) que es utilizada para medir el rendimiento del sistema que se estudia. (Paredes Hernández)

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis General

Es posible optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.

Hipótesis Específica

- Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
- A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

3.1.1 Operacionalización de variables

- **Variable independiente (I): Método espectral Simplex**

  Es un método de optimización iterativo utilizado en programación matemática, el cual permite optimizar el radio espectral de matrices no negativas sobre un conjunto compacto.

- **Variable dependiente (D): El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita**

  Consiste en encontrar el mínimo y el máximo radio espectral de operadores lineales de dimensión finita de alguna familia compacta, suponiendo que todos estos operadores comparten un cono invariante común, que se supone que es convexo, cerrado, sólido y puntiagudo.

Variables	Dimensión	Indicadores	Método	Técnica
Método espectral simplex **(I)**	- Condiciones teóricas - Familia de productos - El algoritmo	- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo. - Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre. - Describir el procedimiento formal del algoritmo.	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación
El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita **(D)**	- Operadores lineales - Problema de optimización del radio espectral - Espacio de dimensión finita	- Operadores lineales que comparten un cono invariante. - Radio espectral. - Matrices no negativas	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECYO

4.1. Diseño metodológico.

El tipo de investigación empleado para el desarrollo del presente trabajo es básica o fundamental, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y de esta manera generar nuevos conocimientos.

El diseño metodológico desarrollado es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, para ello se iniciará el marco teórico con algunas definiciones básicas para dar paso al problema de optimización del radio espectral, luego se estudiará la base teórica del método espectral simplex para finalmente presentar los resultados según los objetivos trazados.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza del trabajo que es de tipo básico teórico.

4.3. Población y muestra.

Por el tipo de trabajo que es netamente abstracto, no se aplica población ni muestra.

4.4. Lugar de estudio.

El lugar de estudio fue en los ambientes del laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

Debido a la naturaleza del trabajo que es netamente abstracto, no aplica.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la naturaleza del trabajo, esta tesis no tiene procedimiento estadístico y análisis de datos esto por ser netamente abstracto.

Sin embargo, con la variable independiente (Método espectral simplex) permitirá optimizar le radio espectral de manera eficiente. La variable dependiente (El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita Problema de Programación Lineal) nos brindará las condiciones propicias para realizar una optimización efectiva.

4.7. Aspectos éticos en investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto

V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Proyecto de tesis: ¨OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX¨

Tesistas María Margarita Contreras Chapiama
Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

Fecha de Inicio: 03/05/2021

Fecha de término: 03/11/2022

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DUR. (Semanas)	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación Teórica	03/05/2021	23/05/2021	3																
Componente 1: Primer objetivo específico: • Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. (como alcanzo ese objetivo, temas a usar, fechas por cada paso)	24/05/2021	20/06/2021	4																
Componente 2: Segundo objetivo específico, Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.(como alcanzo ese	21/06/2021	18/07/2021	4																
Análisis y discusión de resultados	19/07/2021	15/08/2021	3																
Digitalización y defensa de tesis	16/08/2021	03/11/2022	2																

LEYENDA

Controles y revisiones por asesor

Clases, revisiones y presentaciones de avance

VI. PRESUPUESTO

Especificación	Costos (S/.)	(%)
Materiales y equipo de oficina	1500	17
Textos de especialidad	500	6
Fotocopias, impresiones y espiralado	300	3
Servicio de internet, softwares, Cds, Usb	1500	17
Costo del curso de titulación	4400	49
Gastos de transporte	800	9
Total	9000	100

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barabanov, N. (1998). On the Lyapunov exponent of discrete inclusions. I–III. Automat. Remote Control.

Berman , A., & Plemmons, R. (1979). *Nonnegative matrices in the mathematical sciences,.* Acedemic Press, Now York.

Blondel , V., & Nesterov, Y. (2005). *Computationally efficient approximations of the joint spectral radius* (Vol. 27). SIAM J. Matrx Anal. doi:10.1137 / 040607009

Blondel, V., & Nesterov, Y. (2008). Polynomial-time computation of the joint spectral radiusfor some sets of nonnegative matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 31. 10.1137/080723764.

Blondel, V., Nesterov, Y., & Theys, J. (2005). On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius. *Linear Algebra and its Applications, 394*, 91–107. doi:https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.06.024.

Borwein, J., & Lewis, A. (2006). *Convex Analysis and Nonlinear Optimization* (Vol. 2). Springer-Verlag New York. doi:10.1007 / 978-0-387-31256-9

Castillo, E., Conejo, A., & Pedrega, P. (2002). *Formulacion y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingenería y Ciencias.* Obtenido de http://www.dia.fi.upm.es/~jafernan/teaching/operational-research/LibroCompleto.pdf

Chubay, R. (Mayo de 2017). Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio L2. [Tesis de Licenciatura en la univeridad San Carlos de Guatemala]. Repositorio digital. https://ecfm.usac.edu.gt/node/352.

Cvetković , D., Doob , M., & Sachs, H. (1880). *Espectros de gráficos: teoría y aplicación*. Nueva York: Academic press. ISBN: 0121951502.

De la Fuente, J. (2017). *Rudimientos matemáticos para el dominio de la Ingenería de los Algoritmos Numéricos*. España: Círculo Rojo.

Felix, M. (2015). Diferencias finitas y métodos espectrales para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Arequipa, Perú: [Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de San agustín] Repositorio digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/3231/MAfealm.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Fernández, R. (2017). *Propuesta didáctica y conocimientos de un método espectral (Método de Chebyshev), en la Especialidad de Matemática.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Agustín]. Obtenido de http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/3170

Ganesh, J. (15 de marzo de 2018). Teoría espectral de obtener operadores positivos absolutamente mínimos. Telangana, India: Instituto Indio de Tecnología de Hyderabad.

Gee, B., & Limo, J. (2016). *Determinantes de la Inflación Peruana: un enfoque de econometría espectral.* [Tesis de maestría, Universidad del Pacífico], Lima. Obtenido de http://hdl.handle.net/11354/1449

Guivarc'h, Y., & Quint, J. (2016). *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random*. Paris, Francia.

Heil, C., & Strang, G. (1995). *Continuity of the joint spectral radius: Applications to wavelets,* (Vol. 69). (N. Y. Springer, Ed.) doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4228-4228-4_4

Hong, Y., Shu, J.-L., & Fang, F. (2001). A Sharp Upper Bound of the Spectral Radius of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B81.*, 177-183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997.

Krein, M., & Rutman, M. (1950). *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space.* New York: American Mathematical Society.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Funtional Análysis with applications.* John Wiley & Sons Inc.

Líu, B. (2008). On an upper bound of the spectral radius of graphs. *Matemáticas discretas, 308*(23), 5317–5324. Obtenido de https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.09.049

Mejstrik, T. (2019). Joint spectral radius and subdivision schemes". Vienna, Austria.

Nesterov, Y. (2004). *Introductory Lectures on Convex Optimization.* Boston: Kluwer.

Oleski, D. D., Roy, A., & Driessche, P. V. (2002). Maximal graphs and graphs with maximal spectral radius. *346*(1), 109-130. Obtenido de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379501005043

Palacios, S. (2018). *Una introducción a la teoría espectral de gráficas.* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. Obtenido de https://repositorio.unam.mx/contenidos/419635

Paredes Hernández, S. (s.f.). *Fundamentos d optimización.* Universidad Politécnica de Cartagena.

Protasov, V. (1996). The joint spectral radius and invariant sets of the several linear operators. *Fundam. Prikl. Mat., 2*(1), 205–231. Obtenido de http://www.mathnet.ru/links/68aaba9c863a2812e461f18157a10386/fpm141.pdf

Protasov, V. (1997). *The generalized spectral radius: A geometric approach* (Vol. 61). (I. Mathematics, Ed.) A geometric approach. doi:10.1070/IM1997v061n05ABEH000161

Protasov, V. (2000). *Asymptotic behaviour of the partition function* (Vol. 131). Sbornik: Mathematics. doi:10.1070/SM2000v191n03ABEH000464

Protasov, V. (2008). Extremal Lp-norms of linear operators and self-similar functions,. *Linear Algebra and its Applications, 428*, 2339-2356. doi:10.1016/j.laa.2007.09.023.

Protasov, V. (2010). When do several linear operators share an invariant cone? *Linear Algebra and its Applications, 433*(4), 781-789. Obtenido de https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.04.006

Rodman, L., Seyalioglu, H., & Spitkovsky, I. (2010). On common invariant cones for families of matrices. *Linear Algebra and its Applications, 432*(4), 911–926. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/82175831.pdf

Sáenz, D. (2016). *Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12404/6960

Vandergraft, J. (s.f.). Spectral Properties of Matrices which Have Invariant Cones. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 16*(6), 1208-1222. Obtenido de https://ntrs.nasa.gov/citations/19680002469

Zhai, M., Liu, R., & Shu, J. (2009). On the spectral radius of bipartite graphs with given. *Linear Algebra and its Applications, 430*(4), 1165–1170. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/82531244.pdf

VIII. ANEXOS

Matriz de consistencia.

<table>
<tr><th rowspan="2">Formulación del problema</th><th rowspan="2">Objetivos</th><th rowspan="2">Hipótesis</th><th colspan="4">Operacionalización de variables</th><th rowspan="2">Metodología</th></tr>
<tr><th>Variables</th><th>Dimensión</th><th>Indicadores</th><th>Método</th></tr>
<tr><td>General
¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?</td><td>General
Optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.</td><td>General
Es posible optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.</td><td>Método espectral simplex
(I)</td><td>- Condiciones teóricas
- Familia de productos
- El algoritmo</td><td>- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo.
- Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre.
- Describir el procedimiento formal del algoritmo.</td><td>Método de escritorio o de biblioteca</td><td rowspan="2">- El tipo de investigación es básica, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y así generar nuevos conocimientos.
- El diseño metodológico es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.
- No se trabajó con población ni muestra. Sin embargo, el estudio se encuentra inmerso en un conjunto de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita</td></tr>
<tr><td>Específico
• ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales?
• ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?</td><td>Específico
• Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
• Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.</td><td>Específico
• Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
• A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.</td><td>El problema de optimización del radio espectral para familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita
(D)</td><td>- Operadores lineales
- Problema de optimización del radio espectral
- Espacio de dimensión finita</td><td>- Operadores lineales que comparten un cono invariante.
- Radio espectral.
- Matrices no negativas</td><td>Método de escritorio o de biblioteca</td></tr>
</table>

PROVEÍDO N°630-2022-D-FCNM

Ref. : **Dictamen Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis**
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. CONTRERAS CHAPIAMA, María Margarita
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

Dictamen

Asunto: Evaluación de Proyecto de Tesis.

Lugar: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Fecha: 01 de Octubre de 2022.

Los que suscribimos: Dr. Pedro Canales García, Lic. Absalón Castillo Valdivieso, Dr. Edinson Montoro Alegre y Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, designados por Resolución Decanal No Nº 090-2022-D-FCNM del 26 de Agosto de 2022, como Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex", presentado por la Bachiller CONTRERAS CHAPIAMA, MARÍA MARGARITA, para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis , cumplimos en dictaminar, después de una exhaustiva y meticulosa revisión, que: el Proyecto en mención reúne los requisitos exigidos para su aprobación, y continuación del trámite correspondiente.

Dr. Pedro Canales García

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Dr. Edinson Montoro Alegre

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

“OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX”

Autores:

María Margarita Contreras Chapiama

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

Asesor:

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Línea de investigación

Análisis Numérico y Matemática Computacional

Callao, 2022

PERÚ

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Asesor

María M. Contreras Chapiama

Bachiller

Geraldine M. Villavicencio Urbano

Bachiller

INFORMACIÓN BÁSICA

1. FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Método de optimización para operadores lineales
3. TÍTULO: Optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.
4. AUTORES: María Margarita Contreras Chapiama

ORCID: 0000-0002-2745-3881

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

ORCID: 0000-0001-9096-1494

ASESOR: Magister Ever Franklin Cruzado Quispe

ORCID: 0000-0001-8045-6785
5. LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
6. UNIDADES DE ANÁLISIS: Programación lineal
7. TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica
8. TEMA OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La teoría espectral fue introducida por David Hilbert en su formulación original de la teoría del espacio de Hilbert, luego se extendió a los espacios de Banach, donde se estudian los operadores compactos y muchas propiedades espectrales similares a la de matrices.

La teoría espectral proporciona una herramienta muy potente para entender los operadores lineales, esto se da descomponiendo el espacio sobre el que actúan, en subespacios invariantes sobre los cuales su acción es más simple. En el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal solo está formado por los valores propios.

El radio espectral es un concepto que se utiliza para saber si una matriz iterativa converge o no cuando se resuelve un sistema lineal mediante procesos iterativos (Jacobi, Gaduss-Seidel o SOR).

Blondel & Nesterov (2009), probaron que para familias con operadores lineales de matrices no negativas, con incertidumbre de columna independiente, el radio espectral máximo es en realidad igual al radio espectral conjunto, esta demostración permitirá resolver el problema de calcular el radio espectral conjunto y de ahí con la demostración se pretende en este trabajo estudiar el problema de optimizar el radio espectral máximo y mínimo de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita de alguna familia compacta.

Para realizar tal objetivo se propone estudiar el método espectral simplex elegido por ser eficiente en cuanto la optimización del radio espectral.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Si bien es importante el estudio del radio espectral en las distintas áreas de aplicación, como son la teoría de grafos, la teoría de ecuaciones diferenciales o en el álgebra lineal entre otros, calcularlo resulta extremadamente complejo.

En este trabajo se estudiará el método espectral simplex para optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita, teniendo en cuenta que estos operadores compartirán un mismo cono invariante, es decir que para todo cono su aplicación por el operador sigue estando en el cono (por ejemplo, una familia de matrices no negativas).

1.2. Formulación del problema

Por lo señalado anteriormente, exponemos lo siguiente.

Problema General

¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?

Problema Específico

- ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales?
- ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?

1.3. Objetivos

Objetivo General

Optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.

Objetivo Específico

- Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
- Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

1.4. Justificación

El problema de encontrar la matriz estable o inestable más cercana juega un papel importante en el análisis de ecuaciones diferenciales, dinámica lineal sistemas, electrodinámica, etc. Este problema es notoriamente difícil debido a las propiedades del radio espectral en función de matriz: no es convexa ni cóncava, puede perder la continuidad de Lipschitz en algún punto, Por eso la mayoría de los métodos para este problema sólo encuentran mínimos locales. Sin embargo, para algunas clases de matrices y normas matriciales, este problema se puede resolver eficazmente incluso para mínimos absolutos. Nosotros analizaremos el caso de matrices no negativas. Corresponden a sistemas lineales positivos que surgen naturalmente en problemas de combinatoria, economía matemática, población dinámica, etc.

Para algunos conjuntos de matrices, el problema de optimizar el radio espectral puede resolverse de manera eficiente. En este trabajo se considerarán los conjuntos de matrices no negativas con la estructura del producto, en resumen, familias de productos. Una familia A de matrices d×d se llama familia de productos si hay conjuntos compactos $\mathcal{F}_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d,$ tal que A consta de todas las matrices posibles con i-ésima fila de $\mathcal{F}_i$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Los conjuntos $\mathcal{F}_i$, se denominan conjuntos de incertidumbre. Por tanto, las familias de productos son conjuntos de matrices con incertidumbres de fila independientes: sus filas se eligen independientemente de los conjuntos $\mathcal{F}_i$. Topológicamente, son de hecho productos de los conjuntos de incertidumbre: $\mathrm{A} = \mathcal{F}_i, \times \dots \times \mathcal{F}_i$. Estas familias han sido estudiadas en la literatura debido a aplicaciones en la teoría de grafos espectrales, sistemas asincrónicos, economía matemática, dinámica de poblaciones, etc. El método espectral simplex se aplica cuando todos los conjuntos de incertidumbre $\mathcal{F}_i$ son finitos. Consiste en un aumento consecutivo del radio espectral mediante correcciones de una fila de una matriz. La idea principal es la siguiente. Tomamos una matriz A de una familia de productos A y calculamos su vector propio v de Perron-Frobenius. Luego, para cada $i = 1, \dots d,$ tratamos de maximizar el producto escalar de v con filas del conjunto de incertidumbre $\mathcal{F}_i$. Si para todo i, los máximos se alcanzan en las filas de A, entonces A es la matriz con el radio espectral máximo en la familia A. De lo contrario, reemplazamos una fila de A, digamos, la i-ésima, con la fila de $\mathcal{F}_i$ maximizando el producto escalar. Obtenemos una nueva matriz, repetimos el mismo procedimiento, etc.

La ventaja de este método es que es aplicable tanto para maximizar como para minimizar el radio espectral. Sin embargo, una deficiencia importante es que solo funciona para matrices estrictamente positivas. Si alguna fila de $\mathcal{F}_i$ tiene una entrada cero, entonces el algoritmo puede ciclar.

Incluso si no realiza un ciclo, es posible que la matriz de terminales no proporcione una solución. Una idea natural es hacer que todas las matrices sean positivas mediante ligeras perturbaciones de los coeficientes y luego aplicar el algoritmo a las matrices perturbadas. Sin embargo, en la práctica, esto conduce a errores numéricos en el cálculo del radio espectral óptimo que son difíciles de controlar. La razón es que, en dimensiones altas incluso una pequeña perturbación de coeficientes puede cambiar significativamente el radio espectral.

Es así que en este trabajo se espera optimizar el radio espectral para una clase de familias formada por operadores lineales sobre espacio de dimensión finita vía el método espectral simplex.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2. Temporal

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones temporales

1.5.3. Espacial

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones espaciales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: internacionales y nacionales

Internacional

Chubay (2017) en su tesis “Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio” demuestra que los operadores posición y momentum son adjuntos y densamente definidos en el espacio de Hilbert separable L^2 (R). Resalta la teoría de operadores desarrollada por Von Neuman, el cual se basa en el estudio de operadores en mecánica cuántica, de esta manera desarrolla la caracterización de un espacio de Hilbert separable, así el espectro de los operadores da guía para la formulación de las propiedades de operadores en espacios abstracto con producto interno.

Palacios (2018) en su tesis “Una introducción a la teoría espectral de gráficas” tuvo como objetivo primordial, contribuir a tener presente que la matemáticas se tejen como una robusta red, cuyos puntos más fuerte son los nudos, amarres entre diferentes ramas de la teoría, aquellas encrucijadas a las cuales es posible llegar partiendo de diferentes caminos iniciales, que son muy importantes en la teoría espectral de gráficas que son puente de conexión entre el álgebra, el análisis funcional y la teoría de gráficas entre otras.

Ganesh (2018) en su tesis “Teoría espectral para obtener operadores positivos absolutamente mínimos” probó que la propiedad mínima de logro de un operador lineal acotado en un espacio H de Hilbert cuyo módulo mínimo se encuentra en el espectro discreto, es estable bajo pequeñas perturbaciones compactas. También observó que, dado un operador acotado con un módulo mínimo esencial estrictamente positivo, el conjunto de perturbaciones compactas que no producen un operador que alcanza el mínimo es más pequeño que un conjunto denso. Además, intentó extender estos resultados de estabilidad a las perturbaciones de todos los operadores lineales acotados con normas pequeñas y obtener resultados posteriores.

Mejstrik (2019) en su tesis “Radio espectral articular y esquemas de subdivisión” amplía el enfoque basado en matrices para la configuración de esquemas de subdivisión múltiple, realiza una modificación al algoritmo de politopo invariante realizado por Guglielmi y Protasov en los años 2013 para poder encontrar el valor exacto del radio espectral de una gran clase de matrices, cuando la articulación es de menos de 5 segundos. Este nuevo algoritmo permite calcular límites inferiores para el radio espectral conjunto.

Es así que al contrastar los resultados expuestos sobre la literatura del tema se observa la necesidad de optimizar el radio espectral. El presente trabajo se enfoca en encontrar el radio espectral máximo y mínimo.

Nacional

Gee y Limo (2016) en su investigación “Determinantes de la inflación peruana: un enfoque de econometría espectral” utiliza el análisis espectral para contrastar las principales teorías económicas sobre la inflación, describiendo una serie de tiempos de manera muy útil, ya que, permite comprender cuán relevantes son los ciclos en diferentes frecuencias en la evolución de la variable. Una gran ventaja en el uso de la econometría espectral en este documento es la posibilidad de estudiar los determinantes de la inflación y reconocer su influencia en un plazo específico.

Sáenz (2016) en su tesis “Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas” contribuye en sentar los fundamentos sobre métodos espectrales, para que sean aplicados en futuras investigaciones más elaboradas, así como brindar los códigos de implementación (en Matlab), los cuales raramente se encuentran en forma explícita en la literatura. presentando en forma detallada los métodos espectrales polinomiales, útiles para problemas con condiciones de frontera no periódicas. Presentamos los métodos de Galerkin, Tau y de Colocación y brinda ejemplos de la implementación numérica de la ecuación del calor usando los métodos de diferencias finitas y los métodos espectrales. Además, se brindan los detalles necesarios para implementar la ecuación de Burger usando los métodos espectrales.

Fernández (2017) en su tesis "Propuesta didáctica y conocimientos de un método espectral (Método de Chebyshev), en la especialidad de matemática" estudia los métodos espectrales y construye con un sistema didáctico, asequible a todos los estudiantes que no tiene ese conocimiento, se da a conocer las mejores presentaciones y armado de los polinomios como los polinomios de Newton, y los polinomios de mínimo cuadrados terminando con los polinomios ortogonales como el de Chebyshev, mostramos su aplicación a la economización de series en alta precisión. Después explica como aplicar la teoría espectral en forma didáctica a la solución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

2.2. Bases teóricas

La presente está dedicada a exponer el marco teórico necesario para la concretización de los objetivos referentes al trabajo. Para esto seguiremos los resultados mostrados en (Kreyszig, 1989), (De la Fuente, 2017), (Krein & Rutman, 1950), (Blondel & Nesterov, 2008) (Protasov V. , 1996).

2.2.1. Espacios vectoriales

La noción de espacio vectorial requiere de dos conjuntos: un conjunto $\mathbb{K}$ (los escalares) y otro conjunto E (los vectores). Estos dos conjuntos deben satisfacer ciertas propiedades, que esencialmente se refieren a que los elementos de E se puedan sumar entre sí y multiplicar por elementos de $\mathbb{K}$.

Definición. Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura algebraica que consiste de un conjunto no vacío E, a cuyos elementos se les llama vectores, junto con dos operaciones,

$$\begin{array}{ll} E \times E \to E, & \mathbb{K} \times E \to E, \\ (u, v) \mapsto u + v, & (t, v) \mapsto tv, \end{array}$$

llamadas *suma de vectores* y *multiplicación de un escalar por un vector*, respectivamente que satisfacen las siguientes propiedades:

- $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in E$ (asociativa).
- $u + v = v + u, \forall u, v \in E$ (conmutativa).
- Existe $e \in E$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall v \in E$ (elemento neutro).
- Para cada $v \in E$ existe $w \in E$ tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
- Para $1 \in \mathbb{K}$ se tienes que $1v = v, \forall v \in E$ (unimodular)
- $t(u + v) = tu + tv$ y $(\lambda + t)v = \lambda v + tv$, $u, v \in E$ y $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (distributiva).
- $\lambda(tv) = (\lambda t)v$, $\forall v \in E$, $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (seudo-asociativa).

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ es sistema generador de E si y solo si:

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = E$$

O de manera equivalente:

$$\forall v \in E, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i$$

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = \overline{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Diremos que son linealmente dependiente cuando no son independientes.

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$ es una base de E cuando B es un sistema generador y linealmente.

Definición. Un espacio vectorial E , es de dimensión finita si admite una base finita $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de n vectores. Diremos que la dimensión de E es n, $dim(E) = n$.

Espacios con Producto Interno

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un producto interno en E es una función $E \times E$ en $\mathbb{K}$ que asigna a cada pareja $x, y \in E$ un escalar $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$, llamado producto interno de x y y, que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Conmutativa
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ Distributiva
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle y, x \rangle$ Homogeneidad
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq \vec{0}$ Positividad

2.2.2. Transformaciones Lineales

Definición. Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. La función $A: E_1 \longrightarrow E_2$ es la regla de correspondencia que asigna a cada $x \in E_1$ un único $y \in E_2$, que es llamado imagen de x y es representado por $A(x)$. A este tipo de funciones se les conoce como transformaciones.

Además, para que una transformación sea lineal (operador lineal) debe cumplir las siguientes condiciones:

i. $A(x+y) = A(x) + A(y), x, y \in E_1$.
ii. $A(\lambda x) = \lambda A(x),\ x \in E_1, \lambda \in \mathbb{K}$.

Se dice que A es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|\ \forall x \in dom(A)$

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se llama espacio dual de E, a E^* donde

$$E^* = \{A: E \to \mathbb{K}/A \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Operadores lineales en espacios de producto interno

Definición. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal, se dice que $A^*: E \longrightarrow E$ es el operador adjunto de A, si se cumple que:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

para todo $x, y \in E$

Propiedades del operador adjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con producto interno. Si A y B son operadores lineales en E y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

1. $(A^*)^* = A$
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ donde $\bar{\alpha}$ es el conjugado de α

3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
5. $(A \circ B)^* = A^* \circ B^*$

Operador normal

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es normal si cumple:

$$A \circ A^* = A^* \circ A$$

$$M_B^B(A) M_B^B(A^*) = M_B^B(A^*) M_B^B(A)$$

donde B es una base ortonormal.

Operador autoadjunto

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es normal si $A^* = A$

2.2.3. Teoría espectral de operadores lineales

E es el elemento buscado y $\lambda \in \mathbb{K}$ (real o complejo) es un parámetro.

Definición. (Valores propios, vectores propios, espacios propios, espectro, conjunto resolvente de una matriz).

Un *autovalor* de una matriz $A = (a_{jk})$ es un λ tal que la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene como solución $x \neq 0$. Este x se llama un *autovector* de A correspondiente al valor propio que λ.

El *espacio propio* de A es un subespacio vectorial de E formados por los vectores propios que correspondiente al valor propio λ y el vector cero.

El *espectro* de A, $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los valores propios de A.

El conjunto *resolvente* de A en el plano complejo se define como $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$.

2.2.4. Optimización y programación lineal

Veamos la representación de un problema de programación lineal:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (función\ objetivo)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,3 \dots p - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = p \dots q - 1 \qquad (Restricciones)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = q \dots m$$

donde p, q y m son enteros positivos tales que

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

Definición (Solución factible). Un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisface todas las restricciones, se le denomina solución factible. El conjunto de todas esas soluciones se llama $región\ factible$.

Definición (Solución óptima). Es un punto factible $\bar{x}$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cualquier otro valor factible x se denomina solución óptima del problema

Problema de programación lineal en su forma estandar

Un problema lineal se dice que es de forma estándar si es de minimización y se puede representar de la siguiente manera:

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Donde $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ (b no negativo) y $A \in M^{m\times n}$

Definición (problema dual). Dado el problema inicial (primal), minimizar

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

su problema dual es maximizar

$$Z = b^T y$$

$$s.a. \quad A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

Conjunto de soluciones factibles

Para conocer las soluciones factibles en los problemas de programación matemática es necesario precisar las estructuras de las regiones de factibilidad, las cuales podrían ser:

Tabla: Estructuras que surgen en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones y desigualdades, y su representación

Estructura algebraica	Definición en función de las restricciones	Representación interna
Espacio vectorial	$Hx = 0$	$x = \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Espacio afín	$Hx = a$	$x = q + \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Cono	$Hx \leq 0$	$x = \sum_i \pi_j w_j \,;\; \pi_j \geq 0$
Politopo	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \lambda_k q_k \,; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$
Poliedro	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \rho_i v_i + \sum_i \pi_j w_j + \sum_i \lambda_k q_k \,;$ $\rho_i \in \mathbb{R}\,, \pi_j \geq 0,\;\; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$

Fuente: Formulación y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingeniería y Ciencias pág. 100

Conjuntos Convexos

Definición. Un conjunto K es convexo si y solo si

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

Para todo par de puntos $x, y \in\ K$ y $\lambda \in [0,1]$.

Definición (cono). Un conjunto K se dice cono si para todo $x \in K$ y todo escalar $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda x \in K$. Si K es convexo se denomina **cono convexo**, en ese caso cualquier x, y en K cuando $\alpha x + \beta y$ pertenece a K , para cualquier escalar positivo α, β.

Definición (Envoltura convexa). Dado un conjunto arbitrario M se define la envoltura convexa de M y se representa por conv (M), como la intersección de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a M.

Definición (cono dual). Si K es un cono, se define el cono dual de K como el conjunto

$$K^* = \{y|x^T y \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}$$

El cono dual siempre es convexo, aunque el original K no lo sea.

Definición. Un subconjunto K de un espacio vectorial E de denomina cono verdadero, si es convexo, cerrado, solido, en el sentido de que es su interior no es vacío $(K + (-K) = E)$, y puntiagudo lo que significa que no tiene una línea o que $x \in K, -x \in K \Longrightarrow x = 0$, o $K \cap -K = \{0\}$.

Definición (cono invariante). Se dice que un cono $K \subseteq R^n$ es invariante bajo $A \in R^{n\times n}$ si $Ax \in K$ para todo $x \in K$.

2.2.5. Matrices no Negativas

El conjunto de matrices cuadradas se denota por M_n, y el conjunto de matrices cuadradas con entradas no negativas se denomina M_n^+ . Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $D(x) \in M_n$ la matriz diagonal con el vector x como su diagonal, y por $e^x \in \mathbb{R}^n$ denotamos el vector con coordenadas $e^{x^{(i)}}$. Además, 1 denota el vector de todos los unos, 0 denota el vector de todos los ceros, y e_i denota el i-ésimo vector de coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Finalmente, Δ_n denota el simplex estándar en $\mathbb{R}^n$, y $|\mathrm{M}|$ la cardinalidad del conjunto M .

Radio conjunto de columnas (filas)

Sea $\rho(A)$ el radio espectral de la matriz A, es decir, la mayor magnitud de sus valores propios. Según el teorema de Perron-Frobenius una matriz irreducible no negativa $A \in M_n^+$ tiene un único vector propio u (hasta hasta la multiplicación escalar) tal que

$$Au = \rho(A)u,$$

y todas las componentes del vector u son entonces positivas. Sea la descomposición en columnas de A viene dada por $A = (a_1, \dots, a_n)$. Es bien sabido que el radio espectral de una matriz no negativa admite la siguiente representación:

$$\rho(A) = \inf_{u>0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\langle a_i, u \rangle}{u^{(i)}}$$

Cambiando las variables $u = e^x$, obtenemos

$$\rho(A) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\phi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \langle a_i, e^x \rangle \cdot e^{-x^{(i)}} \right]$$

Denotamos por $x(A)$ el punto del rayo óptimo que satisface la ecuación

$$\langle 1, x(A) \rangle = 0,$$

y $u(A) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x(A)} > 0$. Nótese que $A^T u(A) = \rho(A) \cdot u(A)$.

Para un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ definimos la secuencia

$$x_k = A^k x_0, \quad k \geq 1.$$

Entonces

$$\langle u(A), x_{k+1} \rangle = \langle u(A), Ax_k \rangle = \langle A^T u(A), x_k \rangle$$

$$= \langle D^{-1}\big(u(A)\big)A^T u(A), D(u(A))x_k\rangle$$

$$\leq \rho(A) - 1, D(u(A))xk = \rho(A) - u(A), xk.$$

Consideremos un conjunto compacto M de matrices no negativas.

Definición (Radio de columna conjunto). Sea de M un conjunto compacto de matrices no negativas:

$$\sigma(\mathrm{M}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{A \in \mathrm{M}} \phi_A(x)$$

En esta expresión, las funciones $\phi_A(x)$ son convexas en x y, por tanto, la función $\max_{A \in \mathrm{M}} \phi_A(x)$ también es convexa. Como el radio de columna conjunto es una solución del problema de minimización convexa de $\sigma(\mathrm{M})$, puede calcularse en tiempo polinómico mediante algoritmos estándar de optimización convexa.

Podemos ofrecer otra interpretación interesante del radio de columna conjunto. Denotemos $\widehat{\mathrm{M}} = Conv(\mathrm{M})$ y consideremos el siguiente problema de optimización

$$\max_{A \in \widehat{\mathrm{M}}} \rho(A)$$

La desigualdad

$$\max_{A \in \widehat{\mathrm{M}}} \rho(A) \leq \rho\big(\mathrm{M}\big)$$

se demostró como Proposición 15 en Blondel, Nesterov, & Theys (2005), para una colección finita M. Por el teorema de Carathéodory esta desigualdad puede extenderse fácilmente a conjuntos de incertidumbre convexos arbitrarios.

Nótese que

$$\underset{A\in \mathrm{M}}{\underset{\frown}{\max}}\ \rho(A) = \underset{A\in \mathrm{M}}{\underset{\frown}{\max}}\ \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \phi_A(x) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in \mathrm{M}}\ \phi_A(x)$$

$$= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in \mathrm{M}}\ \phi_A(x) = \sigma\left(\mathrm{M}\ \right).$$

Así, podemos tratar $\sigma(\mathrm{M}\ )$ como un valor de la *relajación lagrangiana* habitual del problema de optimización no convexo problema

$$\underset{A\in \mathrm{M}}{\underset{\frown}{\max}}\ \rho(A)$$

Nótese que

$$\max_{A\in \mathrm{M}}\ \rho(A) \leq \underset{A\in \mathrm{M}}{\underset{\frown}{\max}}\ \rho(A) \leq \sigma\left(\mathrm{M}\ \right)$$

Se puede introducir una cantidad similar al radio de columna conjunto para matrices transpuestas,

$$\mathrm{M}\ ^T = \left\{A^T : A \in \mathrm{M}\ \right\}.$$

A saber, podemos definir el radio de fila conjunto del conjunto M como sigue

$$\sigma_T\left(\mathrm{M}\ \right) = \sigma\left(\mathrm{M}\ ^T\right)$$

Dado que $\rho\left(\mathrm{M}\ \right) = \rho\left(\mathrm{M}\ ^T\right)$, la discusión anterior también se aplica al radio fila conjunto. Sin embargo, en general tenemos que $\sigma_T\left(\mathrm{M}\ \right) \neq \sigma\left(\mathrm{M}\ ^T\right)$. En las partes restantes del documento trabajaremos principalmente con el radio columna conjunto, sin mencionar que todos nuestros resultados pueden aplicarse también al radio fila conjunto.

Lema 1. *Consideremos la siguiente perturbación del conjunto de incertidumbre* M *:*

$$\mathrm{M}_{\epsilon} = \{A + \epsilon 1 1^{T} : A \in \mathrm{M}\}, \ \ \epsilon \geq 0.$$

Entonces $lim_{\epsilon \downarrow 0}\, \sigma(\mathrm{M}_{\epsilon}) = \sigma(\mathrm{M})$.

Lema 2. *Sean positivos los elementos de todas las matrices de* M *. Entonces existe una matriz* $A_{*} = (A_1 e_1, \ldots, A_n e_n)$ *formada por algunas matrices* $A_i \in \widehat{\mathrm{M}}$ *,* $i = 1, \ldots, n$*, tal que*

$$\rho(A*) = \sigma(M).$$

Teorema 1. *Sea* M *un conjunto compacto de matrices no negativas. Entonces*

$$\frac{1}{p} \cdot \sigma(\mathrm{M}) \leq \rho(\mathrm{M}) \leq \sigma(\mathrm{M}),$$

donde $p = min\{n, |\mathrm{M}|\}$.

Conjuntos con incertidumbre de columna independiente

La forma más sencilla de garantizar esta inclusión es suponer que el conjunto M tiene incertidumbres de columna independientes:

$$\mathrm{M} \, ⍰ = (a_1, \ldots, a_n) : \ a_i \in Q_i, i = 1, \ldots, n\}$$

donde todos los conjuntos $Q_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$, son cerrados y acotados.

T*eorema 2.* *Para un conjunto* M *que satisface la condición anterior, tenemos*

$$\max_{A \in \widehat{\mathrm{M}}} \rho(A) = \rho(\mathrm{M}) \leq \sigma(\mathrm{M})$$

Si la solución del problema

$$\sigma(\mathrm{M}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{A \in \mathrm{M}} \phi_A(x)$$

existe, entonces $\sigma(\mathrm{M}) = \rho(A_*)$ para algún punto extremo A_* del conjunto M. Por tanto

$$\max_{A \in \mathrm{M}} \rho(A) = \rho\big(\mathrm{M}\big) \leq \sigma\big(\mathrm{M}\big) = \rho(A_*)$$

Corolario 1. *Consideremos la función $\rho(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathbb{R}_+^n$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces esta función es cuasi-convexa en cada ai cuando todas las demás columnas son fijas.*

Observemos que los conjuntos inciertos de filas (o columnas) independientes surgen de forma muy natural. Una de estas situaciones se da en el contexto de los sistemas lineales asíncronos.

2.2.6. Operadores lineales que comparten un cono en común

Teorema 3. *Una familia irreducible A tiene un cono invariante común si $\rho(\mathrm{A}) = \lambda_{max}(\bar{A})$.*

Condiciones para la existencia de un cono invariante común

Para un k dado $\in \mathbb{N}$ escribimos A^k para la familia de todos los productos m^k de longitud k de las matrices de A: $\big\{A_{d_1}, \ldots, A_{d_k} | d_1, \ldots, d_k \in \{1, \ldots, m\}\big\}$.

Corolario 2. *Supongamos que A es una familia irreducible, y que su operador promedio $\bar{A}$ tiene un valor propio igual a su radio espectral;*

entonces $\mathcal{A}$ posee un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{A}^k$ lo tiene.

Corolario 3. *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia irreducible, y que su operador medio A tiene un valor propio igual a su radio espectral entonces $\bar{A}$ tiene un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ todas las matrices de la familia A^{k} tienen entradas no negativas.*

Pasemos ahora a las condiciones necesarias. En la continuación de esta sección será más conveniente utilizar la notación ρ_1 para el radio 1 ρ. En vista del Teorema 3 cualquier límite inferior para $\rho_1(\mathrm{A})$ da una condición necesaria para la existencia de conos invariantes. Dicha cota puede obtenerse utilizando el radio 2 ρ_2 definido como

$$\rho_1(\mathrm{A}) \lim_{k\to\infty} \left(m^{-k} \sum_{d_1,\dots,d_k} \left\|A_{d_1} \dots, A_{d_k}\right\|^2\right)^{1/2k}.$$

Este valor, en contraste con ρ_1, puede encontrarse fácilmente para una familia arbitraria de operadores. Comparando las definiciones de ρ_1 y ρ_2, y utilizando las desigualdades entre las medias aritméticas y cuadráticas, obtenemos $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \sqrt{m}\rho_1$. Esto produce, en particular, que $\rho_2(\mathrm{A}) \geq \lambda_{max}(\overline{A})$. Ahora el Teorema 1, junto con la Observación 1, implica

Proposición 1. *Si $\rho_2(\mathcal{A}) > \sqrt{m}\lambda_{max}(\overline{A})$. Entonces la familia $\mathcal{A}$ no tiene cono invariante.*

Recordemos que si $\lambda_{max}(\bar{A})$ no está bien definida, es decir, $\bar{A}$ no satisface (*), entonces A obviamente no tiene un cono invariante. En particular, si uno puede encontrar $A_i, A_j \in \mathrm{A}$, para los cuales $\rho_2\left(A_i, A_j\right) > \sqrt{2}\lambda_{max}\left(\frac{1}{2}(A_i + A_j)\right)$, entonces A no tiene un cono invariante. El valor ρ_2 se calcula mediante el operador $\tilde{A}$ actuando en el espacio $\frac{d(d+1)}{2}$ dimensional M_{d} de matrices simétricas $d \times d$:

$$\tilde{A}X = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^T X A_i\right), \quad X \in \mathrm{M}_{\ d}.$$

Este operador deja invariante el cono de matrices semidefinidas positivas, por lo que el valor $\lambda_{max}(\tilde{A})$ está bien definido. Resulta que $\left[\lambda_{max}(\tilde{A})\right]^{1/2} = \rho_2(\mathrm{A})$ (Protasov V. , 1997)]. Así, ρ_2 es el valor propio de Perron-Frobenius de un operador en la dimensión $\frac{d(d+1)}{2}$. En la práctica, en lugar del operador $\tilde{A}$ se puede utilizar la matriz $d^2 \times d^2$- matriz $\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^{\otimes 2}\right)$, que tiene el mismo valor propio de Perron-Frobenius que $\tilde{A}$, donde $A_i^{\otimes 2}$ denota el cuadrado de Kronecker de la matriz A_i (Blondel & Nesterov, 2005). La dimensión de este operador es mayor, pero su matriz está fácilmente disponible.

2.2.6. Familias de producto

Considere ahora algunas familias de operadores con estructura especial. Permítanos introducir un espacio intermedio E_1 con ordenamiento parcial definido por un cono convexo puntiagudo K_1. Arreglamos un operador básico $B: E_1 \to E$, tal que $BK_1 \subseteq K$. Considere ahora una familia $\mathcal{F}$ compuesta por operadores $F: E \to E_1$. Entonces podemos definir nuestra familia principal de operadores como

$$\mathrm{M} = \{A = BF, F \in \mathcal{F}\}$$

Asumiendo $FK \subseteq K_1$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$, garantizamos que todos los operadores de la familia M compartan el mismo cono invariante K

Lema 2. *Supongamos que para* $\bar{A} = B\bar{F}$ *con* $x(\overline{A}) \in intK$ *tenemos*

$$(\bar{F} - F)x(\bar{A}) \in K_1, \ \ \forall F \in \mathcal{F}$$

Entonces $\rho(\bar{A}) = \rho^*(\mathrm{M}) = \sigma^*(\mathrm{M}) \leq \lambda^*(\mathrm{M})$.

Si $x(\bar{A}) \in K$, *y* $(\bar{F} - F)\bar{x} \in K_1$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $\rho(\bar{A}) = \rho_*(\mathrm{M}) = \sigma_*(\mathrm{M}) = \lambda_*(\mathrm{M})$.

Recuerde que el operador A se llama positivo en K si $Ax \in intK$ para todo $x \in K\backslash\{0\}$.

Lema 5. *Para la matriz* $A = BF$, *suponga que existe* $\tilde{F}$ *tal que*

$$d = \left(\tilde{F} - F\right)x(A) \in K_1, \ \ d \neq 0$$

Si $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) > \rho(A)$. *Si* $\left(F - \tilde{F}\right)x(A) \in K_1\backslash\{0\}$, *y* $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) < \rho(A)$.

2.2.7. Método espectral simplex

Condiciones teóricas del método espectral simplex

La siguiente afirmación simple se puede encontrar, en (Berman & Plemmons, 1979). Establece límites inferior y superior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo.

Lema 6. *Sean una matriz* A *y un vector* x *distinto de cero no negativos,* $\mu \geq 0$ *sea un número. Si* $Ax \geq \mu x$, *entonces* $\rho(A) \geq \mu$. *Si* $x > 0$ *y* $Ax \leq \mu x$, *entonces* $\rho(A) \leq \mu$.

Proposición 2. *Sea* A *una familia de productos no negativa. Si una matriz* $\bar{A} \in \mathrm{A}$ *es máxima (mínima) en cada fila, entonces tiene el radio espectral máximo (respectivamente, mínimo) entre todas las matrices de* A.

Lema 7. *Sea* $A \geq 0$ *una matriz y* v *su vector propio principal. Sea una matriz* $B \geq 0$ *obtenida de* A *reemplazando la* j*-ésima fila aj por una fila* b_j*. Entonces tenemos*

a) si $\langle b_j, v\rangle > \langle a_j, v\rangle$*, entonces* $\rho(B) \geq \rho(A)$*. Si, además,* $B > 0$*, entonces* $\rho(B) > \rho(A)$.
b) si $\langle b_j, v\rangle < \langle a_j, v\rangle$*, entonces* $\rho(B) \leq \rho(A)$*. Si, además,* $B > 0$*, entonces* $\rho(B) < \rho(A)$.

La idea del método espectral simplex

Comenzando con alguna matriz $A_1 \in \mathrm{A}$ construimos una secuencia de matrices $A_1, A_2, \ldots$ por la siguiente regla: A_{k+1} se obtiene de A_k cambiando una de sus líneas $a_i^{(k)}$ de modo que $\langle a_i^{(k+1)}, v_k\rangle > \langle a_i^{(k)}, v_k\rangle$, donde v_k es un vector propio principal de A_k. Según el Lema 2, el radio espectral no disminuye en esta secuencia. El proceso termina cuando ninguna de las filas puede ser reemplazada, es decir, cuando la matriz final A_N es máxima en cada fila. Según la Proposición 1, la matriz A_N tiene el radio espectral máximo en la familia A, siempre que $v_N > 0$.

En cada paso, la nueva fila a $a_i^{(k+1)}$ se elige de $\mathcal{F}_i$ para maximizar el producto escalar $\langle a_i^{(k+1)}, v_k\rangle$. Si $\mathcal{F}_i$ es nito, entonces el punto de máximo a $a_i^{(k+1)} \in \mathcal{F}_i$ se puede encontrar por agotamiento.

Si $\mathcal{F}_i$ es un poliedro, entonces encontramos a $a_i^{(k+1)}$ entre sus vértices que resuelven un problema de LP mediante el método simplex (habitual). Por lo tanto, el método espectral simplex actúa como un algoritmo codicioso en cada iteración. Ahora describimos el procedimiento formal del algoritmo.

2.3. Conceptual

Matrices positivas. Se define así a la matriz que tiene todos sus elementos positivos.

Vector propio. Son vectores que no cambian de dirección bajo una determinada transformación lineal.

Ortante. Es la generalización n-dimencional de un cuadrante.

Matriz reducible. Se A una matriz no negativa, se dice que es reducible si tiene un subespacio de coordenadas invariante no trivial, es decir, un espacio generado por algunos vectores e_i de la base canónica. De lo contario se llama irreducible.

2.4 Definición de términos básicos

A continuación, presentamos una definición de términos básicos. Más aún la referencia bibliográfica de donde ha sido obtenida.

Definición (Radio espectral). El radio espectral de una matriz A es el módulo de sus valores propios, representado por $\rho(A)$.

$$\rho(A) = max\{|\lambda_i(A)|, i = 1, \dots, n\}$$

(De la Fuente, 2017, pág. 240)

Definición (compacidad). Se dice que un espacio métrico E es compacto si toda secuencia en E tiene una subsecuencia convergente. Se dice que un subconjunto A de E es compacto si A es compacto considerado como un subespacio de E, es decir, si toda sucesión en A tiene una subsecuencia convergente cuyo límite es un elemento de A. (Kreyszig, 1989, pág. 77)

Definición (Operador lineal). Un operador lineal A es un operador tal que

i. el dominio $D(A)$ de A es un espacio vectorial y el rango $R(A)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo,
ii. para todo $x, y \in D(A)$ y escalares α,

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(ax) = aAx$$

(Kreyszig, 1989, pág. 82)

Definición (Problema de optimización). Consiste en la búsqueda de valores para unas determinadas variables (variables de decisión) de forma que, cumpliendo un conjunto de requisitos representados mediante ecuaciones y/o inecuaciones algebraicas (restricciones) que limitarán la elección de los valores de las variables de decisión, proporcionan el mayor o el menor valor posible para una función (función objetivo) que es utilizada para medir el rendimiento del sistema que se estudia. (Paredes Hernández)

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis General

Es posible optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.

Hipótesis Específica

- Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
- A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

3.1.1 Operacionalización de variables

- **Variable independiente (I): Método espectral Simplex**

  Es un método de optimización iterativo utilizado en programación matemática, el cual permite optimizar el radio espectral de matrices no negativas sobre un conjunto compacto.

- **Variable dependiente (D): El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita**

  Consiste en encontrar el mínimo y el máximo radio espectral de operadores lineales de dimensión finita de alguna familia compacta, suponiendo que todos estos operadores comparten un cono invariante común, que se supone que es convexo, cerrado, sólido y puntiagudo.

Variables	Dimensión	Indicadores	Método	Técnica
Método espectral simplex **(I)**	- Condiciones teóricas - Familia de productos - El algoritmo	- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo. - Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre. - Describir el procedimiento formal del algoritmo.	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación
El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita **(D)**	- Operadores lineales - Problema de optimización del radio espectral - Espacio de dimensión finita	- Operadores lineales que comparten un cono invariante. - Radio espectral. - Matrices no negativas	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECYO

4.1. Diseño metodológico.

El tipo de investigación empleado para el desarrollo del presente trabajo es básica o fundamental, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y de esta manera generar nuevos conocimientos.

El diseño metodológico desarrollado es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, para ello se iniciará el marco teórico con algunas definiciones básicas para dar paso al problema de optimización del radio espectral, luego se estudiará la base teórica del método espectral simplex para finalmente presentar los resultados según los objetivos trazados.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza del trabajo que es de tipo básico teórico.

4.3. Población y muestra.

Por el tipo de trabajo que es netamente abstracto, no se aplica población ni muestra.

4.4. Lugar de estudio.

El lugar de estudio fue en los ambientes del laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

Debido a la naturaleza del trabajo que es netamente abstracto, no aplica.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la naturaleza del trabajo, esta tesis no tiene procedimiento estadístico y análisis de datos esto por ser netamente abstracto.

Sin embargo, con la variable independiente (Método espectral simplex) permitirá optimizar le radio espectral de manera eficiente. La variable dependiente (El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita Problema de Programación Lineal) nos brindará las condiciones propicias para realizar una optimización efectiva.

4.7. Aspectos éticos en investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto

V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Proyecto de tesis: "OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL DE UNA FAMILIA COMPACTA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX"

Tesistas María Margarita Contreras Chapiama
Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

Fecha de Inicio: 03/05/2021

Fecha de término: 03/11/2022

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DUR. (Semanas)	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación Teórica	03/05/2021	23/05/2021	3																
Componente 1: Primer objetivo específico: • Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. (como alcanzo ese objetivo, temas a usar, fechas por cada paso)	24/05/2021	20/06/2021	4																
Componente 2: Segundo objetivo específico, Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.(como alcanzo ese	21/06/2021	18/07/2021	4																
Análisis y discusión de resultados	19/07/2021	15/08/2021	3																
Digitalización y defensa de tesis	16/08/2021	03/11/2022	2																

LEYENDA

Controles y revisiones por asesor

Clases, revisiones y presentaciones de avance

VI. PRESUPUESTO

Especificación	Costos (S/.)	(%)
Materiales y equipo de oficina	1500	17
Textos de especialidad	500	6
Fotocopias, impresiones y espiralado	300	3
Servicio de internet, softwares, Cds, Usb	1500	17
Costo del curso de titulación	4400	49
Gastos de transporte	800	9
Total	9000	100

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barabanov, N. (1998). On the Lyapunov exponent of discrete inclusions. I–III. Automat. Remote Control.

Berman , A., & Plemmons, R. (1979). *Nonnegative matrices in the mathematical sciences,.* Acedemic Press, Now York.

Blondel , V., & Nesterov, Y. (2005). *Computationally efficient approximations of the joint spectral radius* (Vol. 27). SIAM J. Matrx Anal. doi:10.1137 / 040607009

Blondel, V., & Nesterov, Y. (2008). Polynomial-time computation of the joint spectral radiusfor some sets of nonnegative matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 31. 10.1137/080723764.

Blondel, V., Nesterov, Y., & Theys, J. (2005). On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius. *Linear Algebra and its Applications, 394*, 91–107. doi:https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.06.024.

Borwein, J., & Lewis, A. (2006). *Convex Analysis and Nonlinear Optimization* (Vol. 2). Springer-Verlag New York. doi:10.1007 / 978-0-387-31256-9

Castillo, E., Conejo, A., & Pedrega, P. (2002). *Formulacion y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingenería y Ciencias.* Obtenido de http://www.dia.fi.upm.es/~jafernan/teaching/operational-research/LibroCompleto.pdf

Chubay, R. (Mayo de 2017). Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio L2. [Tesis de Licenciatura en la univeridad San Carlos de Guatemala]. Repositorio digital. https://ecfm.usac.edu.gt/node/352.

Cvetković , D., Doob , M., & Sachs, H. (1880). *Espectros de gráficos: teoría y aplicación*. Nueva York: Academic press. ISBN: 0121951502.

De la Fuente, J. (2017). *Rudimientos matemáticos para el dominio de la Ingenería de los Algoritmos Numéricos*. España: Círculo Rojo.

Felix, M. (2015). Diferencias finitas y métodos espectrales para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Arequipa, Perú: [Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de San agustín] Repositorio digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/3231/MAfealm.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Fernández, R. (2017). *Propuesta didáctica y conocimientos de un método espectral (Método de Chebyshev), en la Especialidad de Matemática.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Agustín]. Obtenido de http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/3170

Ganesh, J. (15 de marzo de 2018). Teoría espectral de obtener operadores positivos absolutamente mínimos. Telangana, India: Instituto Indio de Tecnología de Hyderabad.

Gee, B., & Limo, J. (2016). *Determinantes de la Inflación Peruana: un enfoque de econometría espectral.* [Tesis de maestría, Universidad del Pacífico], Lima. Obtenido de http://hdl.handle.net/11354/1449

Guivarc'h, Y., & Quint, J. (2016). *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random*. Paris, Francia.

Heil, C., & Strang, G. (1995). *Continuity of the joint spectral radius: Applications to wavelets,* (Vol. 69). (N. Y. Springer, Ed.) doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4228-4228-4_4

Hong, Y., Shu, J.-L., & Fang, F. (2001). A Sharp Upper Bound of the Spectral Radius of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B81.*, 177-183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997.

Krein, M., & Rutman, M. (1950). *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space.* New York: American Mathematical Society.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Funtional Análysis with applications.* John Wiley & Sons Inc.

Líu, B. (2008). On an upper bound of the spectral radius of graphs. *Matemáticas discretas, 308*(23), 5317–5324. Obtenido de https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.09.049

Mejstrik, T. (2019). Joint spectral radius and subdivision schemes". Vienna, Austria.

Nesterov, Y. (2004). *Introductory Lectures on Convex Optimization.* Boston: Kluwer.

Oleski, D. D., Roy, A., & Driessche, P. V. (2002). Maximal graphs and graphs with maximal spectral radius. *346*(1), 109-130. Obtenido de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379501005043

Palacios, S. (2018). *Una introducción a la teoría espectral de gráficas.* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. Obtenido de https://repositorio.unam.mx/contenidos/419635

Paredes Hernández, S. (s.f.). *Fundamentos d optimización.* Universidad Politécnica de Cartagena.

Protasov, V. (1996). The joint spectral radius and invariant sets of the several linear operators. *Fundam. Prikl. Mat., 2*(1), 205–231. Obtenido de http://www.mathnet.ru/links/68aaba9c863a2812e461f18157a10386/fpm141.pdf

Protasov, V. (1997). *The generalized spectral radius: A geometric approach* (Vol. 61). (I. Mathematics, Ed.) A geometric approach. doi:10.1070/IM1997v061n05ABEH000161

Protasov, V. (2000). *Asymptotic behaviour of the partition function* (Vol. 131). Sbornik: Mathematics. doi:10.1070/SM2000v191n03ABEH000464

Protasov, V. (2008). Extremal Lp-norms of linear operators and self-similar functions,. *Linear Algebra and its Applications, 428*, 2339-2356. doi:10.1016/j.laa.2007.09.023.

Protasov, V. (2010). When do several linear operators share an invariant cone? *Linear Algebra and its Applications, 433*(4), 781-789. Obtenido de https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.04.006

Rodman, L., Seyalioglu, H., & Spitkovsky, I. (2010). On common invariant cones for families of matrices. *Linear Algebra and its Applications, 432*(4), 911–926. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/82175831.pdf

Sáenz, D. (2016). *Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12404/6960

Vandergraft, J. (s.f.). Spectral Properties of Matrices which Have Invariant Cones. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 16*(6), 1208-1222. Obtenido de https://ntrs.nasa.gov/citations/19680002469

Zhai, M., Liu, R., & Shu, J. (2009). On the spectral radius of bipartite graphs with given. *Linear Algebra and its Applications, 430*(4), 1165–1170. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/82531244.pdf

VIII. ANEXOS

Matriz de consistencia.

Formulación del problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de variables				Metodología
			Variables	**Dimensión**	**Indicadores**	**Método**	
General ¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?	**General** Optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.	**General** Es posible optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.	Método espectral simplex **(I)**	- Condiciones teóricas - Familia de productos - El algoritmo	- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo. - Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre. - Describir el procedimiento formal del algoritmo.	Método de escritorio o de biblioteca	- El **tipo de investigación** es básica, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y así generar nuevos conocimientos. - El **diseño metodológico** es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. - **No se trabajó con población ni muestra**. Sin embargo, el estudio se encuentra inmerso en un conjunto de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita
Específico • ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales? • ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?	**Específico** • Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. • Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.	**Específico** • Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. • A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.	El problema de optimización del radio espectral para familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita **(D)**	- Operadores lineales - Problema de optimización del radio espectral - Espacio de dimensión finita	- Operadores lineales que comparten un cono invariante. - Radio espectral. - Matrices no negativas	Método de escritorio o de biblioteca	